



Universidade Federal
de Mato Grosso



ENGENHARIA FLORESTAL
UFMT

UNIDADE VIII – ENSAIOS FATORIAIS

PROF.: RÔMULO MÔRA

CUIABÁ, MT
2015/2

1. INTRODUÇÃO

Ensaio fatorial é aquele em que se estudam simultaneamente dois ou mais fatores, cada um deles com dois ou mais níveis.

O fatorial é um tipo de esquema, ou seja, uma das maneiras de organizar os tratamentos e não um tipo de delineamento, que representa a maneira pela qual os tratamentos são distribuídos às unidades experimentais. Na verdade, os experimentos fatoriais são montados segundo um tipo de delineamento experimental, como por exemplo: o DIC e o DBC.

Nos experimentos fatoriais, os tratamentos são obtidos pelas combinações dos níveis dos fatores.

A simbologia comumente utilizada, para experimentos fatoriais é indicar o produto dos níveis dos fatores em teste.

Por exemplo: Experimento Fatorial 2x4x6. O produto 2x4x6 informa que no experimento foram testados simultaneamente 3 fatores. O primeiro possui 2 níveis, o segundo 4 níveis e o terceiro 6 níveis.

Quando o número de níveis é igual para todos os fatores, pode-se utilizar a seguinte simbologia: n^F , em que F é o número de fatores e n é o número de níveis de cada fator. Por exemplo: Experimento Fatorial 4^3 . A potência 4^3 informa que o experimento tem 3 fatores com 4 níveis cada um.

2. EFEITOS AVALIADOS NUM EXPERIMENTO EM FATORIAL

✓ **EFEITO PRINCIPAL** - é o efeito de cada fator, independente do efeito dos outros fatores;

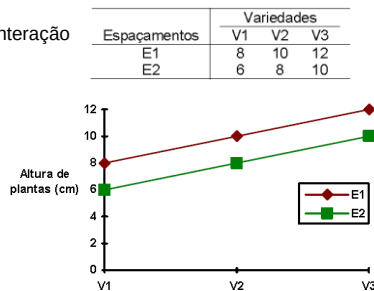
✓ **EFEITO DE INTERAÇÃO** - é o efeito simultâneo dos fatores sobre a variável em estudo. Dizemos que ocorre interação entre os fatores quando os efeitos dos níveis de um fator são modificados pelos níveis do outro fator.

Considere o seguinte Fatorial 3x2 com 3 variedades (V) e 2 espaçamentos (E).

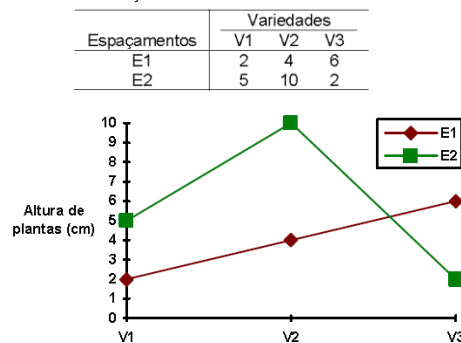
V1E1 V2E1 V3E1
V1E2 V2E2 V3E2

Suponha os seguintes resultados fictícios, para a variável altura de plantas (cm), deste experimento, nas seguintes situações:

✓ Sem Interação



✓ Com Interação



3. QUADRO DE TABULAÇÃO DE DADOS

Uma maneira de tabular os dados de um experimento fatorial, com dois fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, instalados segundo o DIC, com K repetições, é fornecida a seguir:

Repetição	A1				A2				...	AI			
	B1	B2	...	BJ	B1	B2	...	BJ		B1	B2	...	BJ
1	Y ₁₁₁	Y ₁₂₁	...	Y _{1J1}	Y ₂₁₁	Y ₂₂₁	...	Y _{2J1}	...	Y _{I11}	Y _{I21}	...	Y _{IJ1}
2	Y ₁₁₂	Y ₁₂₂	...	Y _{1J2}	Y ₂₁₂	Y ₂₂₂	...	Y _{2J2}	...	Y _{I12}	Y _{I22}	...	Y _{IJ2}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
K	Y _{11K}	Y _{12K}	...	Y _{1JK}	Y _{21K}	Y _{22K}	...	Y _{2JK}	...	Y _{I1K}	Y _{I2K}	...	Y _{IJK}
Total	Y _{1.}	Y _{2.}	...	Y _{J.}	Y _{21.}	Y _{22.}	...	Y _{2J.}	...	Y _{I1.}	Y _{I2.}	...	Y _{IJ.}

Deste quando pode-se retirar algumas informações de interesse:

- Número de unidades experimentais: N = IJK

✓ Total

Geral:

$$G = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Y_{ijk} = \sum_{i=1}^I A_i = \sum_{j=1}^J B_j = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (AB)_{ij}$$

✓ Total do i-ésimo nível do fator A :

$$A_i = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K Y_{ijk}$$

✓ Total do i-ésimo nível do fator B :

$$B_j = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K Y_{ijk}$$

✓ Média do i-ésimo nível do fator A: $\hat{m}_{A_i} = \frac{A_i}{JK}$

✓ Média do i-ésimo nível do fator B: $\hat{m}_{B_j} = \frac{B_j}{IK}$

✓ Média do i-ésimo tratamento (AB)_{ij}: $\hat{m}_{AB_{ij}} = \frac{(AB)_{ij}}{K}$

✓ Média Geral: $\hat{m}_G = \frac{G}{N}$

Pode-se montar um quadro auxiliar contendo os totais de tratamentos, cujos valores são obtidos pela soma de todas as repetições para o tratamento em questão. Este quadro facilita o cálculo das somas de quadrados devido aos fatores A e B, e da interação entre eles. Para a situação citada, o quadro de totais de tratamentos é do seguinte tipo:

Fator A	Fator B				Totais
	B1	B2	...	BJ	
A1	Y _{11.}	Y _{12.}	...	Y _{1J.}	A ₁
A2	Y _{21.}	Y _{22.}	...	Y _{2J.}	A ₂
...	...	...	...	...	...
AI	Y _{I1.}	Y _{I2.}	...	Y _{IJ.}	A _I
Totais	B ₁	B ₂	...	B _J	G

4. MODELO ESTATÍSTICO

Considere um experimento fatorial, com dois fatores: o fator A com I níveis e o fator B com J níveis, instalados segundo o DIC, com K repetições. O modelo estatístico para um experimento como este é:

$$Y_{ijk} = m + a_i + b_j + (ab)_{ij} + e_{ijk} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, I \\ j = 1, 2, \dots, J \\ k = 1, 2, \dots, K \end{matrix}$$

em que:

Y_{ijk} = é o valor observado para a variável em estudo referente a k-ésima repetição da combinação do i-ésimo nível do fator A com o j-ésimo nível do fator B;

m = é a média de todas as unidades experimentais para a variável em estudo;

a_i = é o efeito do i-ésimo nível do fator A no valor observado Y_{ijk};

b_j = é o efeito do j-ésimo nível do fator B no valor observado Y_{ijk};

ab_{ij} = o efeito da interação do i-ésimo nível do fator A com o j-ésimo nível do fator B;

e_{ijk} = é o erro associado a observação Y_{ijk} ou seja é o efeito dos fatores não controlados na parcela;

Considere um experimento fatorial, com dois fatores: o fator A com I níveis e o fator B com J níveis, instalados segundo o DBC, com K repetições. O modelo estatístico para um experimento como este é:

$$Y_{ijk} = m + bl_k + a_i + b_j + (ab)_{ij} + e_{ijk} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, I \\ j = 1, 2, \dots, J \\ k = 1, 2, \dots, K \end{matrix}$$

em que:

bl_k = é o efeito do k-ésimo bloco na observação Y_{ijk}

Todas as outras variáveis foram definidas anteriormente

5. ANÁLISE DE VARIÂNCIA

A análise de variância de um experimento fatorial é feita desdobrando-se a soma de quadrados de tratamentos nas partes devido aos efeitos principais de cada fator e na parte devido à interação entre os fatores.

O quadro a seguir apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições, instalado segundo o DIC.

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}	F _{tab}
Fator A	(I-1)	SQA	SQA/(I-1)	QMA/ QMRésiduo	[(I-1);n ₂]
Fator B	(J-1)	SQB	SQB/(J-1)	QMB/ QMRésiduo	[(J-1);n ₂]
Int(AxB)	(I-1)(J-1)	SQAxB	SQAxB/ (I-1)(J-1)	QMAxB/ QMRésiduo	[(I-1)(J-1);n ₂]
(Trat)	(IJ-1)	(SQTrat)	-	-	-
Resíduo	n ₂ =IJ(K-1)	SQRes	SQRes/ IJ(K-1)	-	-
Total	IJK-1	SQTotal	-	-	-

Sendo: FV = Fonte de Variação; GL = Graus de Liberdade; SQ = Soma de Quadrados; QM = Quadrado Médio; F_{cal} = Valor de F calculado; F_{tab} = Valor de F tabelado.

Com as seguintes fórmulas definidas:

$$SQTotal = \sum_{i=1, j=1, k=1}^{I, J, K} Y_{ijk}^2 - C \quad C = \frac{\left(\sum_{i=1, j=1, k=1}^{I, J, K} Y_{ijk} \right)^2}{IJK}$$

- Soma de Quadrados do Tratamento

$$SQTrat = SQ(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^K \frac{(AB)_{ij}^2}{K} - C$$

- Soma de Quadrados do Fator A

- Soma de Quadrados do Fator B

$$SQA = \sum_{i=1}^I \frac{A_i^2}{JK} - C$$

$$SQB = \sum_{j=1}^J \frac{B_j^2}{IK} - C$$

Soma de Quadrados da Interação AxB

- Soma de Quadrados do Resíduo

$$SQAxB = SQTrat - SQA - SQB$$

$$SQResiduo = SQTotal - SQTrat$$

O quadro abaixo apresenta como seria a análise de um experimento fatorial, com 2 fatores A e B, com I e J níveis, respectivamente, e K repetições (ou blocos), instalado segundo o DBC.

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}	F _{tab}
Fator A	(I-1)	SQA	SQA/(I-1)	QMA/ QMRésiduo	[(I-1);n ₂]
Fator B	(J-1)	SQB	SQB/(J-1)	QMB/ QMRésiduo	[(J-1);n ₂]
Int(AxB)	(I-1)(J-1)	SQAxB	SQAxB/ (I-1)(J-1)	QMAxB/ QMRésiduo	[(I-1)(J-1);n ₂]
(Trat)	(IJ-1)	(SQTrat)	-	-	-
Blocos	(K-1)	SQBloc	-	-	-
Resíduo	n ₂ =(IJ-1)(K-1)	SQRes	SQRes/ (IJ-1)(K-1)	-	-
Total	IJK-1	SQTotal	-	-	-

Sendo: FV = Fonte de Variação; GL = Graus de Liberdade; SQ = Soma de Quadrados; QM = Quadrado Médio; F_{cal} = Valor de F calculado; F_{tab} = Valor de F tabelado.

Com as seguintes fórmulas definidas:

- Soma de Quadrado de Blocos

$$SQBloc = \sum_{i=1, j=1}^{I, J} \frac{Bloc_{ij}^2}{IJ} - C$$

- Total de Blocos

$$Bloc_k = \sum_{k=1}^K Bloc_k$$

- Soma de Quadrado dos Resíduos para DBC

$$SQResiduo = SQTotal - STrat - SQBloco$$

As hipóteses para realizar o teste F para os efeitos principais são

Fator A

H₀ : m_{A1} = m_{A2} = ... = m_{Ai} = m_{Aj}, ou seja, todos os possíveis contrastes entre as médias dos níveis do fator A, são estatisticamente nulos, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

H_a : não H₀, ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator A, que é estatisticamente diferente de zero, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

Fator B

H₀ : m_{B1} = m_{B2} = ... = m_{Bi} = m_{Bj}, ou seja, todos os possíveis contrastes entre as médias dos níveis do fator B, são estatisticamente nulos, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

H_a : não H₀, ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator B, que é estatisticamente diferente de zero, ao nível de probabilidade em que foi executado o teste.

A regra decisória para os efeitos principais a partir do teste F é a seguinte:

- F_{cal} ≥ F_{tab}, rejeita-se H₀ ao nível de α% de probabilidade, ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator A ou B estatisticamente diferente de zero.

- F_{cal} < F_{tab}, não rejeita-se H₀ ao nível de α% de probabilidade, ou seja, todos os possíveis contrastes entre as médias dos níveis do fator A ou B são estatisticamente nulos.

OBSERVAÇÃO: FAZ UMA REGRA PARA CADA FATOR PRINCIPAL, POIS PODEM TER CONCLUSÕES DIFERENTES

As hipóteses para realizar o teste F para a interação AxB

Interação AxB

H_0 : os fatores atuam independentemente

H_a : os fatores não atuam independentemente

A regra decisória para a interação AxB a partir do teste F é a seguinte:

- $F_{cal} \geq F_{tab}$, rejeita-se H_0 ao nível de $\alpha\%$ de probabilidade, ou seja, os fatores não atuam independentemente e há uma interação entre eles.

- $F_{cal} < F_{tab}$, não rejeita-se H_0 ao nível de $\alpha\%$ de probabilidade, ou seja, os fatores atuam independentemente e não há interação entre eles.

OBSERVAÇÃO: PRIMEIRO CONCLUI-SE PARA A INTERAÇÃO E SOMENTE SE NÃO REJEITAR H_0 ESTUDA-SE OS FATORES PRINCIPAIS, SE NÃO FAZ-SE O ESTUDO DE UM FATOR DENTRO DO OUTRO...CASO QUE SERÁ VISTO A ADIANTE

5.1 INTERAÇÃO NÃO SIGNIFICATIVA

Se os fatores A e B forem qualitativos, e o teste F para A e/ou B, for não significativo, a aplicação do teste de médias é desnecessária. Se o teste F for significativo, para A e/ou B, aplica-se um teste de médias para comparar os níveis do fator. As estimativas das médias dos níveis dos fatores são obtidas por

$$\text{Fator A} \rightarrow \bar{m}_A = \frac{A_i}{JK} \quad \text{Fator B} \rightarrow \bar{m}_B = \frac{B_j}{IK}$$

Fator A $\rightarrow H_0: m_{Ai} = m_{A0}$ versus $H_a: m_{Ai} \neq m_{A0}$ para $i \neq u = 1, 2, 3, \dots, I$

Fator B $\rightarrow H_0: m_{Bj} = m_{B0}$ versus $H_a: m_{Bj} \neq m_{B0}$ para $j \neq v = 1, 2, 3, \dots, J$

Para realizar o teste de Tukey para comparar as medias dos níveis dos fatores em teste temos que usar

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \hline A \quad q \sqrt{\frac{QMRes}{JK}} \quad (I; n_2) \\ \\ B \quad q \sqrt{\frac{QMRes}{IK}} \quad (J; n_2) \end{array}$$

5.2 INTERAÇÃO SIGNIFICATIVA

Este caso ocorre quando a hipótese H_0 para a interação entre os fatores é rejeitada. Este resultado implica que os efeitos dos fatores atuam de forma dependente. Neste caso as comparações entre os níveis de um fator levam em consideração o nível do outro fator, pois o resultado significativo para a interação indica que o efeito de um fator depende do nível do outro fator.

Portanto, não é recomendado realizar o teste F para cada fator isoladamente tal como foi apresentado para o caso da interação não significativa.

O procedimento recomendado é realizar o desdobramento do efeito da interação.

Para realizar este desdobramento deve-se fazer uma nova análise de variância em que os níveis de um fator são comparados dentro de cada nível do outro fator, tal como apresentado nas tabelas a seguir.

Desdobramento para comparar os níveis de A dentro de cada nível de B, ou seja, estudar A/B

Desdobramento para comparar os níveis de A dentro de cada nível de B, ou seja, estudar A/B

FV	GL	SQ	QM	F_{cal}	F_{tab}
A/B ₁	(I-1)	SQA/B_1	$\frac{SQA/B_1}{(I-1)}$	$\frac{QMA/B_1}{QMRes}$	[(I-1); n ₂]
A/B ₂	(I-1)	SQA/B_2	$\frac{SQA/B_2}{(I-1)}$	$\frac{QMA/B_2}{QMRes}$	[(I-1); n ₂]
...	...	...	...	...	...
A/B _n	(I-1)	SQA/B_n	$\frac{SQA/B_n}{(I-1)}$	$\frac{QMA/B_n}{QMRes}$	[(I-1); n ₂]
Resíduo	$n_2 = GLRes^*$	$SQRes^*$	$QMRes^*$	-	-

*Valores retirados do quadro de análise de variância principal

Desdobramento para comparar os níveis de B dentro de cada nível de A, ou seja, estudar B/A

FV	GL	SQ	QM	F_{cal}	F_{tab}
B/A ₁	(J-1)	SQB/A_1	$\frac{SQB/A_1}{(J-1)}$	$\frac{QMB/A_1}{QMRes}$	[(J-1); n ₂]
B/A ₂	(J-1)	SQB/A_2	$\frac{SQB/A_2}{(J-1)}$	$\frac{QMB/A_2}{QMRes}$	[(J-1); n ₂]
...	...	...	...	...	...
B/A _n	(J-1)	SQB/A_n	$\frac{SQB/A_n}{(J-1)}$	$\frac{QMB/A_n}{QMRes}$	[(J-1); n ₂]
Resíduo	$n_2 = GLRes^*$	$SQRes^*$	$QMRes^*$	-	-

*Valores retirados do quadro de análise de variância principal

Se os fatores forem qualitativos, procede-se ao teste F para cada fonte de variação do desdobramento. Nas fontes de variação em que o teste F foi significativo e o fator tem mais de dois níveis, recomenda-se a aplicação de um teste de médias. As estimativas das médias dos níveis dos fatores são obtidas por

$$\text{Fator A dentro B} - m_{A/B_i} = \frac{A_{i/B_j}}{K} \quad \text{Fator B dentro de A} - m_{B/A_j} = \frac{B_{j/A_i}}{K}$$

Para realizar o teste de Tukey para comparar as médias dos níveis dos fatores em teste temos que usar

$$\begin{array}{ll} H_0: m_{A/B_i} = m_{A/B_j} & H_0: m_{B/A_j} = m_{B/A_i} \\ H_a: m_{A/B_i} \neq m_{A/B_j} & H_a: m_{B/A_j} \neq m_{B/A_i} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \hline A \quad q \sqrt{\frac{QMRes}{K}} \quad (I; n_2) \\ \\ B \quad q \sqrt{\frac{QMRes}{K}} \quad (J; n_2) \end{array}$$

EXEMPLO – INTERAÇÃO NÃO SIGNIFICATIVA

Vamos considerar os dados de um experimento casualizado em blocos, no esquema fatorial 3×3 , em que foram estudados os efeitos de 3 Peneiras comerciais, associadas a 3 Densidades de plantio, na produtividade do amendoim (*Arachis hypogaea* L.) variedade Tatu V53. (Adaptado e Banzatto e Kronka, 2006).

As Peneiras comerciais (P) e as Densidades de Plantio (D) estudadas foram:

P_1 = peneira 18

P_2 = peneira 20

P_3 = peneira 22

D_1 = 10 plantas por metro linear

D_2 = 15 plantas por metro linear

D_3 = 20 plantas por metro linear

Proceder a análise de variância e realizar o teste de Tukey se necessário. Para os cálculos utilize $\alpha=5\%$.

Tratamentos	Blocos			Totais
	1	2	3	
1 – P_1D_1	11,82	12,03	12,55	36,40
2 – P_1D_2	12,34	14,08	12,13	38,55
3 – P_1D_3	13,41	12,98	13,35	39,74
4 – P_2D_1	6,97	10,26	9,02	26,25
5 – P_2D_2	8,96	9,02	9,84	27,82
6 – P_2D_3	8,48	9,66	8,50	26,64
7 – P_3D_1	7,53	7,67	7,81	23,01
8 – P_3D_2	6,71	7,87	9,49	24,07
9 – P_3D_3	7,82	9,44	9,37	26,63
Totais	84,04	93,01	92,06	269,11

Resolução:

Hipóteses

Fator P

$H_0: m_{P_1} = m_{P_2} = m_{P_3} = m_P$

H_a : não H_0

Fator D

$H_0: m_{D_1} = m_{D_2} = m_{D_3} = m_D$

H_a : não H_0

Interação Px D

H_0 : os fatores atuam independentemente

H_a : os fatores não atuam independentemente

Bloco	Totais
Bl_1	84,04 ⁽⁹⁾
Bl_2	93,01 ⁽⁹⁾
Bl_3	92,06 ⁽⁹⁾

- Quadro Auxiliar

P/D	D_1	D_2	D_3	Totais	Totais
P_1	36,40 ⁽³⁾	38,55 ⁽³⁾	39,74 ⁽³⁾	114,69 ⁽⁹⁾	269,11 ⁽²⁷⁾
P_2	26,25 ⁽³⁾	27,82 ⁽³⁾	26,64 ⁽³⁾	80,71 ⁽⁹⁾	
P_3	23,01 ⁽³⁾	24,07 ⁽³⁾	26,63 ⁽³⁾	73,71 ⁽⁹⁾	
Totais	85,66 ⁽⁹⁾	90,44 ⁽⁹⁾	93,01 ⁽⁹⁾	269,11 ⁽²⁷⁾	

- Quadro de Análise de Variância

FV	GL	SQ	QM	F_{cal}
Fator P	2	106,7778	53,3889	86,98*
Fator D	2	3,0917	1,5459	2,52 ^{ns}
Int Px D	4	1,5733	0,3933	0,64 ^{ns}
(Trat)	(8)	(111,4428)	-	-
Bloco	2	5,3957	-	-
Resíduo	16	9,8203	0,6138	-
Total	26	126,6588	-	-

$$F_{tab} = F_{5\%}(2;16) = 3,63$$

$$F_{tab} = F_{5\%}(4;16) = 3,01$$

- Calculando Soma de Quadrados

$$SQ_{Total} = (11,82^2 + \dots + 9,37^2) - \frac{(269,11)^2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 126,6588$$

$$SQ_{Bloc} = \left(\frac{84,04^2}{3} + \frac{93,01^2}{3} + \frac{92,06^2}{3} \right) - \frac{(269,11)^2}{27} = 5,3957$$

$$SQ(PD)_{ij} = \left(\frac{36,40^2}{3} + \dots + \frac{26,63^2}{3} \right) - \frac{(269,11)^2}{27} = 111,4428$$

$$SQ_{Res} = 126,6588 - 111,4428 - 5,3957 = 9,8203$$

$$SQP = \left(\frac{114,69^2}{3} + \frac{80,71^2}{3} + \frac{73,71^2}{3} \right) - \frac{(269,11)^2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 106,7778$$

$$SQD = \left(\frac{85,66^2}{3} + \frac{90,44^2}{3} + \frac{93,01^2}{3} \right) - \frac{(269,11)^2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3,0917$$

$$SQ_{Px D} = 111,4428 - 106,7778 - 3,0917 = 1,5753$$

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}
Fator P	2	106,7778	53,3889	86,98*
Fator D	2	3,0917	1,5459	2,52 ^{ns}
Int PxD	4	1,5733	0,3933	0,64 ^{ns}
(Trat)	(8)	(111,4428)	-	-
Bloco	2	5,3957	-	-
Resíduo	16	9,8203	0,6138	-
Total	26	126,6588	-	-

$$F_{tab} = F_{5\%}(2;16) = 3,63$$

$$F_{tab} = F_{5\%}(4;16) = 3,01$$

- Conclusões

- Interação

$F_{cal} < F_{tab} - 0,64 < 3,01$ não rejeita-se H_0 ao nível de 5% de probabilidade, ou seja, os fatores atuam independentemente.

- Fator P

$F_{cal} > F_{tab} - 86,98 > 3,63$ rejeita-se H_0 ao nível de 5% de probabilidade, ou seja, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator P estatisticamente diferente de zero.

Teste de Tukey

$$H_0: m_{P_1} = m_{P_j}, \quad p/i \neq j \quad q_{0,05} = (3;16) = 3,65$$

$$H_a: m_{P_1} \neq m_{P_j}$$

$$\hat{m}_{P_1} = 12,74g \quad a$$

$$\hat{m}_{P_2} = 8,97g \quad b$$

$$\hat{m}_{P_3} = 8,19g \quad b$$

$$\Delta = 3,65 \sqrt{\frac{0,6138}{9}} = 0,95g$$

Conclusão: as médias dos níveis do fator P seguidas de pelo menos uma letra não diferem entre si, ao nível de 5% de probabilidade, pelo teste de Tukey.

- Fator D

$F_{cal} < F_{tab} - 2,52 < 3,63$ não rejeita-se H_0 ao nível de 5% de probabilidade, ou seja, todos os possíveis contrastes entre médias dos níveis do fator D são estatisticamente nulos.

EXEMPLO – INTERAÇÃO SIGNIFICATIVA

Vamos considerar os dados de um experimento inteiramente casualizado, com 4 repetições, no esquema fatorial 3×2 , para testar os efeitos de 3 Recipientes (R_1 , R_2 e R_3) para produção de mudas e 2 espécies de eucaliptos (E_1 e E_2) quanto ao desenvolvimento das mudas. (Adaptado e Banzatto e Kronka, 2006).

Os Recipientes e as Espécies testados foram:

R_1 = saco plástico pequeno

R_2 = saco plástico grande

R_3 = laminado

E_1 = *Eucalyptus citriodora*

E_2 = *Eucalyptus grandis*

Proceder a análise de variância e realizar o teste de Tukey se necessário. Para os cálculos utilize $\alpha=5\%$.

As alturas médias das mudas, em cm, aos 80 dias de idade são apresentados no quadro seguinte.

Tratamentos	Repetições				Totais
	1	2	3	4	
1 – R_1E_1	26,2	26,0	25,0	25,4	102,6
2 – R_1E_2	24,8	24,6	26,7	25,2	101,3
3 – R_2E_1	25,7	26,3	25,1	26,4	103,5
4 – R_2E_2	19,6	21,1	19,0	18,6	78,3
5 – R_3E_1	22,8	19,4	18,8	19,2	80,2
6 – R_3E_2	19,8	21,4	22,8	21,3	85,3

R/E	E_1	E_2	Totais
R_1	102,6 ⁽⁴⁾	101,3 ⁽⁴⁾	203,9 ⁽⁸⁾
R_2	103,5 ⁽⁴⁾	78,3 ⁽⁴⁾	181,8 ⁽⁸⁾
R_3	80,2 ⁽⁴⁾	85,3 ⁽⁴⁾	165,5 ⁽⁸⁾
Totais	286,3 ⁽¹²⁾	264,9 ⁽¹²⁾	551,2 ⁽²⁴⁾

Resolução:

Hipóteses

Fator R

$$H_0: m_{R_1} = m_{R_2} = m_{R_3} = m_P$$

$$H_a: \text{não } H_0$$

Fator E

$$H_0: m_{E_1} = m_{E_2} = m_E$$

$$H_a: \text{não } H_0$$

Interação PxD

$$H_0: \text{os fatores atuam independentemente}$$

$$H_a: \text{os fatores não atuam independentemente}$$

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}
Fator R	2	92,86	46,43	36,27
Fator E	1	19,08	19,08	14,91
Int RxE	2	63,76	31,88	24,91*
(Trat)	(5)	(175,70)	-	-
Resíduo	18	23,09	1,28	-
Total	23	198,79	-	-

$$F_{tab} = F_{5\%}(1;18) = 4,41$$

$$F_{tab} = F_{5\%}(2;18) = 3,55$$

$$SQ_{Total} = (26,2^2 + \dots + 21,3^2) - \frac{(551,2)^2}{3.2.4} = 198,79$$

$$SQ(RE)_{ij} = \left(\frac{102,6^2}{4} + \dots + \frac{85,3^2}{4} \right) - \frac{(551,2)^2}{24} = 175,70$$

$$SQ_{Res} = 198,79 - 175,70 = 23,09$$

$$SQR = \left(\frac{203,9^2}{2.4} + \frac{181,8^2}{2.4} + \frac{165,5^2}{2.4} \right) - \frac{(551,2)^2}{24} = 92,86$$

$$SQE = \left(\frac{286,3^2}{3.4} + \frac{264,9^2}{3.4} \right) - \frac{(551,2)^2}{24} = 19,08$$

$$SQ_{RxE} = 175,70 - 92,86 - 19,08 = 63,76$$

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}
Fator R	2	92,86	46,43	36,27
Fator E	1	19,08	19,08	14,91
Int RxE	2	63,76	31,88	24,91*
(Trat)	(5)	(175,70)	-	-
Resíduo	18	23,09	1,28	-
Total	23	198,79	-	-

$$F_{tab} = F_{5\%}(1;18) = 4,41$$

$$F_{tab} = F_{5\%}(2;18) = 3,55$$

- Conclusões

- Interação

$F_{cal} > F_{tab} - 24,91 < 3,55$, rejeita-se H_0 ao nível de 5% de probabilidade, ou seja, os fatores não atuam independentemente.

Estudo do fator R dentro dos níveis do fator E

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}
R/E ₁	2	87,12	43,56	34,03*
R/E ₂	2	69,50	34,50	27,15*
Resíduo	18	23,09	1,28	-

$$F_{tab} = F_{5\%}(2;18) = 3,55$$

$$SQ(R/E_1) = \left(\frac{102,6^2}{4} + \frac{103,5^2}{4} + \frac{80,2^2}{4} \right) - \frac{(286,3)^2}{12} = 87,12$$

$$SQ(R/E_2) = \left(\frac{101,3^2}{4} + \frac{78,3^2}{4} + \frac{85,3^2}{4} \right) - \frac{(264,9)^2}{12} = 69,50$$

- Conclusão

Dentro dos níveis E₁ e E₂, existe pelo menos um contraste entre as médias dos níveis do fator R estatisticamente diferente de zero.

Teste de Tukey

$$H_0: m_{R/E_1} = m_{R/E_2} \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

$$H_a: m_{R/E_1} \neq m_{R/E_2} \quad j = 1, 2$$

$$\hat{m}_{R/E_1} = 25,9 \quad a$$

$$\hat{m}_{R/E_2} = 25,3 \quad a$$

$$\hat{m}_{R/E_1} = 25,7 \quad a$$

$$\hat{m}_{R/E_2} = 21,3 \quad b$$

$$\hat{m}_{R/E_1} = 20,1 \quad b$$

$$\hat{m}_{R/E_2} = 19,6 \quad b$$

$$q_{0,05} = (3;18) = 3,61$$

$$\Delta = 3,61 \sqrt{\frac{1,28}{4}} = 2,2$$

Conclusão: Dentro dos níveis E₁ e E₂, as médias dos níveis do fator R seguidas de pelo menos uma letra não diferem entre si, ao nível de 5% de probabilidade, pelo teste de Tukey.

Estudo do fator E dentro dos níveis do fator R

FV	GL	SQ	QM	F _{cal}
E/R ₁	1	0,21	0,21	0,16 ^{ns}
E/R ₂	1	79,38	79,38	62,02*
E/R ₃	1	3,25	3,25	2,54 ^{ns}
Resíduo	18	23,09	1,28	-

$$F_{tab} = F_{5\%}(1;18) = 4,41$$

$$SQ(E/R_1) = \left(\frac{102,6^2}{4} + \frac{101,3^2}{4} \right) - \frac{(203,9)^2}{8} = 0,21$$

$$SQ(E/R_2) = \left(\frac{103,5^2}{4} + \frac{78,3^2}{4} \right) - \frac{(181,8)^2}{8} = 79,38$$

$$SQ(E/R_3) = \left(\frac{80,2^2}{4} + \frac{85,3^2}{4} \right) - \frac{(165,5)^2}{8} = 3,25$$

- Conclusões

Dentro dos níveis R₁ e R₃, todos os possíveis contrastes entre níveis do fator E são estatisticamente nulos ao nível de 5 % de probabilidade.

Dentro do nível R₂, todos os possíveis contrastes entre as médias dos níveis do fator E são estatisticamente diferente de zero ao nível de 5% de probabilidade.

FIM